

1 Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' = a(x)y + b(x)$$

$$a(x), b(x) \in \mathbb{R}$$

1.1 homogene Lösung $b(x) = 0$

$$y' = a(x)y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = a(x) \Leftrightarrow \ln |y| = \int a(x) dx + \tilde{c} \Leftrightarrow y = \pm e^{\int a(x) dx} \underbrace{e^{\tilde{c}}}_{> 0} \stackrel{\text{VZ in } c}{=} c e^{\int a(x) dx}$$

1.1.1 Allgemeine Lösung

(i) ohne gegebenes AWP:

$$y_{\text{hom}}(x) = c e^{\int a(x) dx}; \quad c \in \mathbb{R}$$

(ii) mit AWP: $y(x_0) = y_0$

$$y_{\text{hom}}(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x a(t) dt}$$

1.1.2 Charakteristisches Polynom χ

Allg.: $\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ für $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$
wenn $a(x) = a = \text{konst}$ mit $a \in \mathbb{R}$

(i) ohne gegebenes AWP:

$$y_{\text{hom}}(x) = c e^{\lambda x}; \quad c \in \mathbb{R}$$

(ii) mit AWP: $y(x_0) = y_0$

$$y_{\text{hom}}(x) = y_0 e^{\lambda(x-x_0)}$$

1.2 inhomogene Lösung

1.2.1 Variation der Konstanten

Sei Φ Fundamentalsystem der homogenen Lösung.

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Hier $\Phi(x) = e^{\int_{x_0}^x a(t) dt}$

(i) ohne AWP

$$c(x) = \int \Phi^{-1}(s)b(s) ds$$

$$\Rightarrow y(x) = \Phi(x)c(x)$$

(ii) mit AWP: $y(x_0) = y_0$

$$c(x) = \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)b(s) ds$$

$$\Rightarrow y_{\text{part}} = \Phi(x)c(x)$$

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x)$$

$$= y_0 e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} + e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} \int_{x_0}^x e^{-a(s)} b(s) ds$$

1.2.2 Typ Rechte Seite

Sei $a(x) = a = \text{konst.}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $y' + ay = b(x)$

$$\text{mit } b(x) = \begin{cases} p(x) & \text{(i)} \\ p(x)e^{\mu x} & \text{(ii)} \\ p_1(x) \cos(\mu x) + p_2(x) \sin(\mu x) & \text{(iii)} \\ (p_1(x) \cos(\mu x) + p_2 \sin(\mu x))e^{\eta x} & \text{(iv)} \end{cases}$$

(i) $y_{\text{part}}(x) = q(x) \Rightarrow \deg q = \deg p$

(ii) Ansatz: $y_{\text{part}}(x) = q(x)e^{\mu x}$

(a) $\deg q = \deg p$, wenn μ keine Nullstelle des char. Polynoms χ ist

(b) $\deg q = \deg p + \text{Vielfachheit } \mu$, wenn μ Nullstelle von χ ist

(iii) Komplexifizierung der rechten Seite mit $b(x) = (p_1(x) - ip_2(x))e^{i\mu x}$

Ansatz: $y_{\text{part},1}(x) = q(x)e^{i\mu x}$

(a) $\deg q = \deg p_1 = \deg p_2$, wenn $i\mu$ keine Nullstelle von χ ist

(b) $\deg q = \deg p_1 + \text{Vielfachh. } i\mu = \deg p_2 + \text{Vielfachh. } i\mu$, wenn $i\mu$ Nullstelle von χ

\Rightarrow partikuläre Lösung $y_{\text{part}} = \text{Re}(y_{\text{part},1})$

(iv) Komplexifizierung der rechten Seite mit $b(x) = (p_1(x) - ip_2(x))e^{(\eta+i\mu)x}$

Ansatz: $y_{\text{part},1}(x) = q(x)e^{(\eta+i\mu)x}$

(a) $\deg q = \deg p_1 = \deg p_2$, wenn $\eta + i\mu$ keine Nullstelle von χ

(b) $\deg q = \deg p_1 + \text{Vielfachheit } \eta + i\mu \text{ Nullstelle} = \deg p_2 + \text{Vielfachheit } \eta + i\mu$,
wenn $\eta + i\mu$ Nullstelle von χ

\Rightarrow partikuläre Lösung $y_{\text{part}} = \text{Re}(y_{\text{part},1})$

2 Lineare DGL 2. Ordnung

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

In dynamisches System überführen:

$$y_1 = y$$

$$y_2 = y'$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(x) \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Lösen dieser DGL siehe HM2 und Variation der Konstanten

2.1 homogene Lösung $c(x) = 0$

Charakteristisches Polynom χ

(i) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}; \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

(ii) $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$$

(iii) $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}$

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 \operatorname{Re}(e^{\lambda_1 x}) + c_2 \operatorname{Im}(e^{\lambda_1 x})$$

Bestimme c_1, c_2 aus $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$

2.2 inhomogene Lösung

2.2.1 Variation der Konstanten

siehe 1.2.1 (i)

2.2.2 Typ Rechte Seite

siehe 1.2.2 mit $y'' + ay' + by = c(x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a = \text{konst.}, b = \text{konst.}$

3 DGL-System n -ter Ordnung

$$\vec{y}' = A(t)\vec{y}(t) + B(t) \text{ mit } A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, B(t) \in \mathbb{R}^n$$

3.1 homogene Lösung $B(t) = \vec{0}$

3.1.1 $A(t) = A = \text{konst.}$

- Charakteristisches Polynom
- Löse mit HM2 (EW, EV, HV)

3.1.2 $A(t)$ variabel

Löse mit HM2 (EW, EV, HV)

3.2 inhomogene Lösung

3.2.1 Variation der Konstanten

siehe 1.2.1 (i)

3.2.2 Typ Rechte Seite

siehe 1.2.2

4 DGL's bestimmten Typs

4.1 Trennung der Variablen

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \Leftrightarrow \int g(y) dy = \int f(x) dx \Leftrightarrow G(y(x)) = F(x) + c \quad ; c \in \mathbb{R}$$

- Bestimme Nullstellen μ von $g(y) \Rightarrow$ partikuläre Lösungen: $y_{\text{part}}(x) = \mu$
- Bestimme c mit gegebenem AWP $y(x_0) = y_0$
- wenn möglich nach $y(x)$ auflösen

$$\rightarrow y(x) = G^{-1}(F(x) + c)$$

4.2 Integration durch Substitution

4.2.1 $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Substituiere $v(x) = \frac{y(x)}{x}$

$$\rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}(f(v(x)) - v(x))$$

- Bestimme Nullstellen μ von $f(\mu) - \mu = 0 \Rightarrow y_{\text{part}}(x) = \mu x$
- Bestimme allgemeine Lösung von $v' = \frac{1}{x}(f - v)$ mit 0.3.1
- Allgemeine Lösung: $y(x) = xv(|x|)$

4.2.2 $y' = f(ax + by + c)$, $b \neq 0$

- Substituiere $v(x) = ax + by(x) + c$
- Löse mit 4.1

4.3 Bernoulli-DGL

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$$

$$\Psi(x) = y(x)^{1-\alpha}$$

$$\rightarrow \Psi'(x) = (1 - \alpha)(a(x)\Psi(x) + b(x))$$

Diese lineare DGL 1. Ordnung lösen

$$\Rightarrow y(x) = \Psi(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

4.4 Riccati-DGL

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$$

Bestimme partikuläre Lösungen $\varphi(x)$

$$\eta = \frac{1}{y-\varphi}$$

$$\rightarrow \eta' = -\eta(2c(x)\varphi(x) + b(x)) - c(x)$$

Diese lineare DGL 1. Ordnung lösen

$$\Rightarrow y(x) = \varphi(x) + \frac{1}{\eta(x)}$$

4.5 Vektorfeld

Es gilt: $v(\varphi(t)) = F(t, \varphi(t)) = \varphi'(t)$

$$v(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ v_2(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$$v_1(\vec{x})y' - v_2(\vec{x}) = 0$$

(a) DGL lösen

oder

(b) Überprüfe Integrabilitätsbedingung

→ Wähle Sterngebiet

→ Bestimme Stammfunktion des Vektorfeldes, siehe HM3

4.6 Picard-Lindelöf

Es gilt: $v(\varphi(t)) = F(t, \varphi(t)) = \varphi'(t)$, $\varphi_0(\tau_0) = \vec{x}_0$

$$\varphi_k(t) = \vec{x}_0 + \int_{\tau_0}^t F(\tau, \varphi_{k-1}(\tau)) d\tau$$